ブール環上での性質を用いた質問からの学習に関する研究

浮田善文

1 はじめに

近年，ブール関数の質問からの学習について様々な研究が行われている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. 所属性質問からの学習とは，入力空間から選んだ入力を質問し，入力に対応する出力を受け取ることで得られる入出力対の集合から仮説を学習するモデルである．

質問からの学習についての研究は，対象とする仮説クラス，質問モデル，研究目的によって大別することができる．

まず，対象とする仮説クラスであるが，仮説としてブール関数を考える場合，代表的な表現方法として，ブール束上での表現とブール環上での表現があげられる．ブール束上で定義される仮説クラスとして，k-clause CNF 式，k-term DNF 式, read-once 式など様々なクラスについて研究が行われている [3, 4]. ブール束上での表現は論理演算によって表現され，命題論理と等価な表現であるため，ブール束上で表現される仮説クラスを考えることは自然であると考えられる．一方，ブール環上で定義される仮説クラスとして，項の個数が t 個以下である t-sparse 関数 [1, 2] があげられる．しかし，ブール環上では t-sparse 以外の仮説クラスについては，あまり研究されていない．また，2 つの表現法の相互関係を論じた研究は見受けられない．

次に質問モデルについて考える．質問からの学習の分野でこれまでに

扱われていた代表的な質問モデルとして，学習者が選択した入力集合を一括して質問する非適応型質問，それまでの質問結果をもとに学習者が次に質問する入力を決定できる適応型質問があげられる．一方，学習の分野ではないが，質問する入力選択と類似の問題として，実験計画における水準組合せ選択があげられる [9, 10]．実験計画の問題は，特性値に影響を及ぼす要因（主効果，交互作用）を明らかにすることが目的である．ここで，一つの要因を調べるために複数の水準組合せが必要であり，実験計画ではこの水準組合せ集合を一括して実験を行う．このとき逐次実験計画のモデルを質問からの学習として考えると，入力集合をブロック単位で質問を行う質問モデルととらえることができる．このように仮説クラスによっては，それに適した質問モデルがあると考えられる．また，この他にも様々な仮説クラスに対し，様々な質問モデルを考える必要があると思われる．

次に研究目的について考える．質問からの学習の研究分野の一つに計算論的学習理論と呼ばれる分野があげられるが，この分野では，どの仮説クラスはどの種類の質問を用いれば多項式時間学習可能かを示すことを目的としている．一方，仮説クラスと質問の種類が与えられたもとで，計算量や質問回数が最小となる質問選択アルゴリズムを求めることを目的とすることが考えられる．

そこで本稿では，ブロック単位で質問を行う質問モデルが適したブール環上の新しい仮説クラスを定義する．そしてこのクラスに対し，計算量・メモリ量・質問回数の点で効率良く真の仮説を学習するアルゴリズムを提案する．ここで，新たな仮説クラスとは，仮説に含まれる異なる変数の個数が s 以下であり，ブール環上で表現されたときの係数間の関係に制約がある仮説クラスである．更に，ブール束上で定義される仮説クラスの一つである read-once 式 [4] はこのクラスの部分クラスであることを示し，その差について評価を行う．

最後に，以後の構成について説明する．2章で本稿で対象とする問題設定を述べ，3章では準備として，ブール環上の標準形であるガロア標準形について述べる．4章では，本稿で対象とするブール環上で定義される仮説クラスを与える．5章では，4章で与えた仮説クラスに対し，真の仮説を見つけるアルゴリズムを提案する．6章でアルゴリズムを用いたときの，次の入力を質問する必要があるかどうかを判定するのに必要な計算量，真の仮説を得るまでの質問回数，アルゴリズムに必要なメモリ量の評価を行う．7章では，従来ブール束上で学習されていた仮説クラスである read-once 式が4章で与えた仮説クラスの部分クラスであることを示し，その差について評価を行う．そして最後にまとめを行う．

2 問題設定

本稿で対象とする仮説は，ブール変数の個数がnのブール関数fであり，入力が $\underline{a} \in \{0,1\}^n$，出力が $f(\underline{a}) \in \{0,1\}$ で与えられる．ここで学習とは，仮説クラス$\mathcal{F}_n$に含まれる真の仮説を同定することである．本稿では所属性質問からの学習を考えるので，以下に定義しておく．

所属性質問からの学習とは，入力空間から選んだ入力 $\underline{a}$[1] を質問し，$\underline{a}$ に対応する出力 $f(\underline{a})$ を受け取ることで得られる入出力対 $(\underline{a}, f(\underline{a}))$ の集合から関数fを学習することである．本稿では，以下で定義するブロック単位で質問するモデルを考える．

定義 1 入力ブロック

ベクトル$\underline{i}$ のハミング重みを$w(\underline{i})$とする．長さnのすべての2元系列からなる入力空間をA_nとし，ハミング重みによってA_nを$n+1$個の入力ブロック（部分集合）$A_n(k) = \{\underline{i} | w(\underline{i}) = k\} (0 \leq k \leq n)$に分割する．こ

[1]本稿では，ベクトルを$\underline{a}$のように表記するものとする．

こで，入力はハミング重みの小さい入力ブロックから順に並んでいるものとする[2]．ただし，入力ブロック $A_n(i)$ 内に含まれる入力の順序は何らかの定められた順序とする． □

例 1 $n=3$ の場合を考える．このとき，

順序 *1*　000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111.

順序 *2*　000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111.

などは，定義 *1* の順序の例である． □

以上のように入力ブロック間には順序があるため，次の入力を質問する必要があるかどうかを判定する（以後，判定アルゴリズムと呼ぶ）ことができれば，次に質問する入力を決定することができる．これより，判定アルゴリズムが決まれば，それに従って質問を行い，真の仮説を学習するアルゴリズムを構成することができる．

次に，判定アルゴリズムの評価基準について述べておく．評価基準は，以下の3つを考える．

1. 判定アルゴリズムに必要な計算量
2. 判定アルゴリズムに必要なメモリ量
3. 真の仮説を学習するまでに行う質問回数

本稿では，問題設定と仮説クラスを定めたもとで，真の仮説を学習するアルゴリズムの性能の評価を行う[3]．

[2]なぜ，この順に並んでいる場合を考えるかは，本稿で対象とする仮説クラスが，仮説に含まれる異なる変数の個数に制限のある仮説クラスであるためである．

[3]どの仮説クラスが多項式時間学習可能かを求める計算論的学習理論とは立場が異なることに注意されたい．

3　準備

ブール関数の代表的な表現形として，ブール束上で定義される積和標準形 (disjunctive normal form; DNF) と，ブール環上で表現されるガロア標準形[4]があげられる．ガロア標準形は算術演算子である排他的論理和 $+$，積 $\cdot$ を用いて表現される．始めにガロア標準形を定義しておく．

3.1　ガロア標準形

ブール環上で任意のブール関数は，ガロア標準形と呼ばれる (1) 式で表現することができる．以後，簡略化のため，$x_{n-1}^{i_{n-1}}x_{n-2}^{i_{n-2}}\cdots x_0^{i_0}$ を $x(\underline{i})$ であらわすものとする．

$$
\begin{aligned}
& f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0) \\
= & \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{\underline{i}} \cdot x_{n-1}^{i_{n-1}} x_{n-2}^{i_{n-2}} \cdots x_0^{i_0} & (1) \\
\equiv & \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{\underline{i}} \cdot x(\underline{i}), & (2)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$x^a = \begin{cases} x, & a = 1; \\ 1, & a = 0. \end{cases} \tag{3}$$

である．

また $f_{\underline{i}} \in \{0, 1\}$ であり，$\underline{i} = (i_{n-1}, i_{n-2}, \cdots, i_0) \in \{0, 1\}^n$ は，i の n-bit 二元表現されたベクトルである．

ここで $x(\underline{i})$ は項と呼ばれ，ブール関数 f は項の集合 $f = \{x(\underline{i}) | f_{\underline{i}} = 1, 0 \le i \le 2^n - 1\}$ としても表現される．

ブール関数 f は，1 である係数 $f_{\underline{i}}$ の個数が高々 t であるとき，t-sparse 関数と呼ばれる．

[4] $GF(2)$ 上多変数多項式 [1]，環和標準形とも呼ばれる．

次に項の積を定義するために，ベクトル$\underline{i}, \underline{j}$の積$\underline{ij}$を次式で定義する．

$$\underline{ij} = (i_{n-1} \vee j_{n-1}, i_{n-2} \vee j_{n-2}, \cdots, i_0 \vee j_0), \tag{4}$$

ただし，$\vee$は論理和をあらわす．

以下に項の積の例をあげる．

例 2 $\underline{i} = 0110, \underline{j} = 0011$である場合を考える．このとき，項$x(\underline{i}) = x_2x_1$，$x(\underline{j}) = x_1x_0$であり，$x(\underline{ij}) = x_2x_1x_0$となる． □

4 仮説クラス

本稿では，以下の二つの仮定を満たす仮説クラスを対象とする．1つ目の仮定は，仮説に含まれる変数の個数に関する仮定であり，2つ目の仮定はブール環上で成立する性質に関する仮定である．この章では，これらの2つの仮定を定義し，更に仮説クラスに含まれる仮説数を与える．

4.1 仮説に含まれる異なる変数の個数に関する仮定

始めに，仮説に含まれる異なる変数の個数について説明する．

例 3 仮説$x_0 + x_1 + x_1x_0 + x_2x_1$に含まれる異なる変数の個数は，3である． □

次に，仮説に含まれる異なる変数の個数に関する仮定を以下で与える．

仮定 1 仮説に含まれる異なる変数の個数は，s以下とする． □

この仮定は，仮説に含まれる異なる変数の個数の多い複雑な仮説は出現しないことを仮定している．

以下で，仮定1を満たすブール関数をあらわす式について説明する．以下の補題が成立する．

補題 1 仮説に含まれる異なる変数の個数がs以下である任意のブール関数は，$\underline{a(s)}$, $(\underline{a(s)} \in \{0,1\}^n, w(\underline{a(s)}) = s)$ を用い，次式で表現することができる．

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0) = \sum_{\underline{i} \sqsubseteq \underline{a(s)}} f_{\underline{i}} \cdot x(\underline{i}) \tag{5}$$

ただし，$\underline{j} \sqsubseteq \underline{i}$は，二つのベクトル$\underline{j}, \underline{i}$において，すべての$k(0 \leq k \leq n-1)$に対し，$j_k \leq i_k$であることを示している． □

4.2 ブール環上の性質に関する仮定

はじめに，ブール環上の性質を定義しておく．

性質 1 任意の二つの係数 $f_{\underline{i}}$, $f_{\underline{j}}$に対し，$f_{\underline{i}} = 1$ かつ$f_{\underline{j}} = 1$であるならば，$f_{\underline{ij}} = 1$が成立する． □

ここで，仮説クラスに対する仮定を以下に示す．

仮定 2 仮説クラスは，性質 *1* を満たす仮説から構成される． □

仮定 2 を満たす仮説クラス，仮定 1 と仮定 2 を満たす仮説クラスをそれぞれ，product 関数，s-product 関数と呼ぶ．

4.3 仮説クラスに含まれる仮説数

この節では，仮説クラス$\mathcal{F}_n$に含まれる仮説数を与える．ここで，後に提案アルゴリズムを用いたときの質問回数を求めるときに，仮説クラスは質問回数によっていくつかの部分集合に分割される．そこで，仮説クラスの部分集合を定義し，部分集合ごとに含まれる仮説数を求めることにする．

部分集合を定義する前に，必要な語を定義しておく．項$x(\underline{i})$ に対し，$\underline{i}$のハミング重みを項の次数と呼ぶ．項$x(\underline{i})$ に含まれる変数の集合を$v(x(\underline{i}))$であらわす．

重みが$w(\underline{i})$以下の項の集合を

$$S_f\left(w(\underline{i})\right) = \left\{x(\underline{j}) | x(\underline{j}) \in f, w(\underline{j}) \le w(\underline{i})\right\} \tag{6}$$

とする．このとき，

$$\left| \bigcup_{x \in S_f(w(\underline{i}))} v(x) \setminus \bigcup_{x \in S_f(w(\underline{i})-1)} v(x) \right| \tag{7}$$

を仮説fの次数$w(\underline{i})$で初めて現れる変数の個数と定義する．

そこで，仮説クラスの部分集合$\mathcal{F}_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$を次数$j(1 \le j \le s)$で初めて現れる変数の個数が$t_j$である仮説の集合と定義する．

このとき，$\mathcal{F}_n = \cup_{t_1,t_2,\cdots,t_s} \mathcal{F}_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$であり，$(t_{11}, t_{12}, \cdots, t_{1s}) \ne (t_{21}, t_{22}, \cdots, t_{2s})$に対して$\mathcal{F}_n(t_{11}, t_{12}, \cdots, t_{1s}) \cap \mathcal{F}_n(t_{21}, t_{22}, \cdots, t_{2s}) = \phi$[5]が成立する．

例 4 $n = 3, s = 2$の場合について，部分集合とその部分集合に含まれる仮説を表 *1*に列挙する．ただし，0, 1は全ての入力に対し，それぞれ0, 1を出力する関数をあらわす． □

次に，部分集合$\mathcal{F}_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$に含まれる仮説数$N_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$は，次の補題によって計算することができる．

補題 2 まず，$t(c) = \sum_{1 \le i \le c} t_i$と定義する．次数の関係から明らかに，$t(s) \le s$である．また，$i < j$の場合，$\binom{i}{j} = 0$としておく．このとき任意の$n$に対し，$N_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$は次式によって再帰的に計算される．

1. $t_i = 0 (1 \le i \le s)$ のとき

$$N_n(0, 0, \cdots, 0) = 2. \tag{8}$$

[5] ϕは空集合をあらわす．

表 1: 部分集合とその部分集合に含まれる仮説 ($n=3, s=2$)

部分集合	部分集合に含まれる仮説
$\mathcal{F}_3(0,0)$	$0, 1$
$\mathcal{F}_3(1,0)$	$x_0, x_1, x_2, 1+x_0, 1+x_1, 1+x_2$
$\mathcal{F}_3(2,0)$	$x_0+x_1+x_1x_0, x_0+x_2+x_2x_0$ $, x_1+x_2+x_2x_1, 1+x_0+x_1+x_1x_0$ $, 1+x_0+x_2+x_2x_0, 1+x_1+x_2+x_2x_1$
$\mathcal{F}_3(0,2)$	x_1x_0, x_2x_0, x_2x_1 $, 1+x_1x_0, 1+x_2x_0, 1+x_2x_1$
$\mathcal{F}_3(1,1)$	$x_0+x_1x_0, x_1+x_1x_0, x_0+x_2x_0$ $, x_2+x_2x_0, x_1+x_2x_1, x_2+x_2x_1$ $, 1+x_0+x_1x_0, 1+x_1+x_1x_0, 1+x_0+x_2x_0$ $, 1+x_2+x_2x_0, 1+x_1+x_2x_1, 1+x_2+x_2x_1$

2. $t_j \neq 0, t_i = 0 (j < i \leq s)$ のとき

$$\begin{aligned} & N_n(t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}, t_j, 0, \cdots, 0) \\ = \;& N_n(t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}, 0, 0, \cdots, 0) \cdot \binom{n - t(j-1)}{t_j} \\ & \cdot \frac{N_{t(j)}(t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}, t_j, 0, \cdots, 0)}{N_{t(j)}(t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}, 0, 0, \cdots, 0)}. \end{aligned} \tag{9}$$

□

まず，(8) 式について説明する．部分集合 $\mathcal{F}_n(0,0,\cdots,0)$ に含まれる仮説は 0 と 1 のみであることから (8) 式が成立する．

次に (9) 式について説明する．まず，ある仮説 $f \in \mathcal{F}_n\,(t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}, 0, \cdots, 0)$ を考える．次に，f に含まれていない $n - t(j-1)$ 個の変数から t_j 個の変数を選択する．そして，これらの変数と f に含まれる変数を用いて次数が j である項の集合を構成し，この部分集合を f に加えて得られる仮説を f' とする．このとき，次数 j で初めて現れる変数の個数が t_j である f' の総数が $\frac{N_{t(j)}(t_1,t_2,\cdots,t_{j-1},t_j,0,\cdots,0)}{N_{t(j)}(t_1,t_2,\cdots,t_{j-1},0,0,\cdots,0)}$ である．

5　アルゴリズム

この章では，s-product 関数に対し，所属性質問を行い真の仮説を出力するアルゴリズムを与える．

5.1　係数の計算方法

まず係数 $f_{\underline{i}}$の計算方法について考える．関数値が与えられたとき，係数は以下の補題によって計算することが出来る．

補題 3　定義 *1* の順序で質問を行うとき，次式を用いることで $w(\underline{i})$ が小さい係数 $f_{\underline{i}}$から順に求めることが出来る．

$$f_{\underline{i}} = f(i_{n-1}, i_{n-2}, \cdots, i_0) + \sum_{\underline{j} \sqsubset \underline{i}} f_{\underline{j}} \tag{10}$$

ただし，$\underline{j} \sqsubset \underline{i}$ は集合 $\underline{j} \sqsubseteq \underline{i}$ から $\underline{i}$ を除いた集合である．

（証明）ベクトル$\underline{j} = (j_{n-1}, j_{n-2}, \cdots, j_0)$, $\underline{i} = (i_{n-1}, i_{n-2}, \cdots, i_0)$ に対し，$\underline{j} \sqsubseteq \underline{i}$であれば，

$$i_{n-1}^{j_{n-1}} i_{n-2}^{j_{n-2}} \cdots i_0^{j_0} = 1 \tag{11}$$

が成立し，$\underline{j} \not\sqsubseteq \underline{i}$であれば，

$$i_{n-1}^{j_{n-1}} i_{n-2}^{j_{n-2}} \cdots i_0^{j_0} = 0 \tag{12}$$

が成立する．これより，*(1)* 式から，

$$f(i_{n-1}, i_{n-2}, \cdots, i_0) = \sum_{\underline{j} \sqsubseteq \underline{i}} f_{\underline{j}} \tag{13}$$

が得られる．ここでブール環上では+と−は同じであるので，*(13)* 式から *(10)* 式が得られる．　□

1: $F_1 = \phi$, $\underline{c} = \underline{0}$ とする．
2: **for** $l := 0$ **to** s **do**
3:     **while** $\underline{i} \in A_n(l)$
4:         **if** $w(\underline{ci}) \leq s$ **then**
5:             **if** $\underline{i} = \underline{jk}$ となる $\underline{j}, \underline{k} \in F_1$ が存在する．**then**
6:                 $F_1 = F_1 \cup \underline{i}$とし，$\underline{c} = \underline{ci}$とする．
7:             **else** $\underline{i}$について所属性質問を行い $f(\underline{i})$ を得て，
8:             (10) 式より $f_{\underline{i}}$を計算する．
9:                 **if** $f_{\underline{i}} = 1$ **then**,
10:                     $F_1 = F_1 \cup \underline{i}$ とし，$\underline{c} = \underline{ci}$とする．
11:     **end while**
12: **end for**
13: 真の仮説 $\sum_{\underline{k} \in F_1} x(\underline{k})$ を出力する．

図 1: 真の仮説を出力するアルゴリズム

5.2 真の仮説を出力するアルゴリズム

s-product 関数に対し，真の仮説を得るアルゴリズム[6]を図1に示す．ただし，$\underline{c}$は，質問する必要のない$\underline{i}$を判定するために用いるn次元ベクトルであり，F_1はブール関数を (2) 式で表現したときに1となる係数$f_{\underline{i}}$ のインデックス$\underline{i}$ （n次元ベクトル）の集合である．以下で，F_1の例を載せる．

例 5 $n = 3$とする．例 *3* の仮説に対し，$F_1 = \{001, 010, 011, 110\}$ となる． □

図1のアルゴリズムについて説明を行う．まず，4行目のif文について説明する．仮定1より，仮説に含まれる異なる変数の個数はs以下であるため，この条件から質問する必要のない$\underline{i}$を4行目のif文によって除いてい

[6] $A_n(l)$ に含まれる入力で質問する必要のある入力を一括して質問するアルゴリズムを構成することもできるが，ここでは保持しておくメモリ量が少ない等の理由から入力を一つづつ質問するアルゴリズム与えた．

る．次に5行目のif文について説明する．5行目のif文は判定アルゴリズムであり，性質1より$\underline{i}$を所属性質問せずに$f_{\underline{i}}$の値が1かどうかを判定している．そして，値が分からない場合のみ7行目で所属性質問を行うアルゴリズムとなっている．

6 アルゴリズムの評価

この章では，判定アルゴリズムに必要な計算量，判定アルゴリズムに必要なメモリ量，真の仮説を学習するまでに必要な質問回数について評価を行う．

6.1 判定アルゴリズムに必要な計算量

図1のアルゴリズムの5行目で，$\underline{i} = \underline{jk}$ となる $\underline{j}, \underline{k} \in F_1$ が存在するかを判定する計算量について考える．ここで集合F_1に含まれる要素数を$|F_1|$であらわすとすると，F_1から二つ選ぶ組合せは$|F_1|(|F_1|-1)/2$で与えられる．これより，入力$\underline{i}$を質問する必要があるかどうかは，高々$|F_1|(|F_1|-1)/2$回，$\underline{i} = \underline{jk}$が成立するかどうか調べればよい．

始めに，(5)式より，

$$|F_1| \leq |\{\underline{i}|\underline{i} \sqsubseteq \underline{a(s)}\}| = 2^s. \tag{14}$$

が成立する．これより，

$$\frac{|F_1|(|F_1|-1)}{2} \leq 2^{2s}. \tag{15}$$

が得られる．

ここで，$s = O(\log n)$であるならば，次式が成立する．

$$\frac{|F_1|(|F_1|-1)}{2} \leq 2^{2s} = O(n^2). \tag{16}$$

これより $s = O(\log n)$ であるとき，次の入力$\underline{i}$を質問する必要があるかどうかを判定するのに，最悪 $O(n^2)$ 時間かかることがわかる．

6.2 判定アルゴリズムに必要なメモリ量

図1のアルゴリズムにおいて，メモリには n 次元ベクトルの集合 F_1 と n 次元ベクトル$\underline{c}$ のみ保持しておけばよい．ここで，$\underline{c}$は一つのベクトルであるため，F_1を保持するのに必要なメモリ量について考える．

1つの n 次元ベクトルを保持するのに n-bit 必要であるので，$|F_1|$ 個のベクトルを保持するのに，

$$n \cdot |F_1| \leq n \cdot 2^s, \tag{17}$$

のメモリが必要となる．

ここで，$s = O(\log n)$ であるならば，次式が成立する．

$$n \cdot |F_1| \leq n \cdot 2^s = O(n^2). \tag{18}$$

このことから，$s = O(\log n)$ であるとき，図1のアルゴリズムに必要なメモリ量は最悪 $O(n^2)$ であることがわかる．

6.3 質問回数

この節では，図1のアルゴリズムを用い，真の仮説を学習するときに行う質問回数について評価を行う．ただし，このアルゴリズムでは3行目の $A_n(l)$ に含まれる$\underline{i}$を質問する順序によって質問回数は異なってしまう．このため，この節では $A_n(l)$ に含まれる入力$\underline{i}$を最悪の順序（質問回数が最大となる順序）で質問を行ったときの回数を質問回数と呼ぶ[7]．

部分集合 $\mathcal{F}_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$ に含まれる仮説を同定するのに必要な質問回数を $Q_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$ と定義する．

[7]この質問回数は，$A_n(l)$ に含まれる入力で質問する必要のある入力を一括して質問したときの質問回数ととらえることもできる．

6.3.1 部分集合に対する質問回数

部分集合$\mathcal{F}_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$に含まれる仮説を学習するときの質問回数$Q_n(t_1, t_2, \cdots, t_s)$は，次式で与えられる．

$$Q_n(t_1, t_2, \cdots, t_s) = 1 + \sum_{i=1}^{s} Z(i), \tag{19}$$

ただし，$Z(i)$は入力ブロック$A_n(i)$に含まれる入力集合の中で質問する必要のある入力数であり，以下で与えられる．

1. $s - t(i-1) > i$ のとき

$$\begin{aligned} Z(i) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{n - t(i-1)}{j} \binom{t(i-1)}{i-j} \\ &\quad - \binom{t(i-1)}{i}. \end{aligned} \tag{20}$$

2. $s - t(i-1) \leq i$ のとき

$$\begin{aligned} Z(i) &= \sum_{j=0}^{s-t(i-1)} \binom{n - t(i-1)}{j} \binom{t(i-1)}{i-j} \\ &\quad - \binom{t(i-1)}{i}. \end{aligned} \tag{21}$$

(20),(21)式について説明を行う．まず，次数$i-1$までに現われていない変数の個数は$n - t(i-1)$であり，次数$i-1$までに現われている変数の個数は$t(i-1)$である．ここで，次数がiである項について，その項の係数を調べればよい．このとき，次数$i-1$までに現われていない変数からj個選択し，次数$i-1$までに現われている変数から$i-j$個選択する組合せ数をjの取り得る範囲で足し合わせた数の質問をすればよい．ただし，仮定1により質問しなくても仮説に含まれるかどうかが分かる項が存在するため，その項に対応した入力は質問する必要がない．その入力数が$\binom{t(i-1)}{i}$である．

次に(20),(21)式において，jの取り得る範囲について考える．あるiに対し，$s-t(i-1)>i$ の場合，jの取り得る範囲は$0\leq j\leq i$である．一方，$s-t(i-1)\leq i$である場合，jは$0\leq j\leq s-t(i-1)$の範囲でよい．これは，後者では現われていない変数が高々$s-t(i-1)$であるため，次数$i-1$までに現われていない変数から選ぶ変数の個数が高々$s-t(i-1)$となるためである．

最後に，質問回数が少ない部分集合はどのような部分集合かについて考える．小さい次数で初めて現われる変数の個数が大きい場合，$t(i-1)$が大きくなる．このとき$s-t(i-1)\leq i$を満たすならば，jの取り得る範囲が小さくなり質問回数が少なくなる．同時に，$\binom{t(i-1)}{i}$も大きくなり，質問回数が少なくなることがわかる．以上より，小さい次数で初めて現われる変数の個数が大きい部分集合は質問回数が小さいことがわかる．

6.3.2 平均質問回数

全ての仮説は等確率で出現すると仮定する．全ての仮説に対する平均質問回数$Q_{n,s}$は次式で与えられる．

$$Q_{n,s} = \frac{\sum_{t_1,t_2,\cdots,t_s} Q_n(t_1,t_2,\cdots,t_s)\cdot N_n(t_1,t_2,\cdots,t_s)}{\sum_{t_1,t_2,\cdots,t_s} N_n(t_1,t_2,\cdots,t_s)} \tag{22}$$

例 6 $n=20, s=3$の場合を考える．

部分集合の平均質問回数$Q_{20}(t_1,t_2,t_3)$と仮説数$N_{20}(t_1,t_2,t_3)$を表 *2*に載せる．このとき，平均質問回数$Q_{20,3}$を求めると，$Q_{20,3} = 207.089$であった．

しかし実際には，仮定 *1* より仮説に含まれる変数の個数がs以下と制限されているため，入力ブロック$A_n(l)$に含まれる入力集合の一部を質問した時点で真の仮説が同定できる場合が存在する．このときブロック内の

表 2: 質問回数と仮説数 ($n = 20, s = 3$)

t_1, t_2, t_3	$Q_{20}(t_1, t_2, t_3)$	$N_{20}(t_1, t_2, t_3)$
0, 0, 0	1351	2
1, 0, 0	382	40
2, 0, 0	75	380
3, 0, 0	21	2280
0, 2, 0	229	380
0, 3, 0	211	9120
1, 1, 0	229	760
2, 1, 0	57	20520
1, 2, 0	211	34200
0, 0, 3	1351	2280
2, 0, 1	75	6840
1, 0, 2	382	6840
0, 2, 1	229	6840
1, 1, 1	229	13680
計		104162

残りの入力を質問する必要がなくなる．これを考慮したときの平均質問回数は144.388であった． □

7 ブール束上で定義される仮説とブール環上で定義される仮説クラスの関係

まずブール束とブール環の二つの代数系の関係について説明する．

7.1 ブール束とブール環

相補的な分配束をブール束$\mathcal{B}$という．$\mathcal{B}$は，束演算である論理和 $\vee$，論理積 $\wedge$，さらに補元の一意性から変数x_iの否定 $\overline{x_i}$ により規定される．特にブール束を代数系として明示したい場合は，ブール束を $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, \overline{x_i})$ とあらわす．

次に，ブール束からブール環$(\mathcal{B}, +, \cdot)$を定めることができることを示す．$\mathcal{B}$の任意の要素x_i, x_jに対して，和$x_i + x_j$および積$x_i \cdot x_j$を次のように定める（$\leftrightarrow$ は異なる代数系で両辺のブール関数が同じであることを表している．次式で左辺はブール環の演算，右辺はブール束の演算を表している.）．

$$x_i + x_j \leftrightarrow (\overline{x_i} \wedge x_j) \vee (x_i \wedge \overline{x_j}) \tag{23}$$

$$x_i \cdot x_j \leftrightarrow x_i \wedge x_j \tag{24}$$

このとき，$(\mathcal{B}, +, \cdot)$は単位元をもつべき等可換環となる．この環がブール環である．

逆に公理的に定めたブール環からブール束を定めることができる．$(\mathcal{B}, +, \cdot)$をブール環とするとき，$\mathcal{B}$の任意の要素x_i, x_jに対して，論理和$x_i \vee x_j$，論理積$x_i \wedge x_j$，および補元$\overline{x_i}$を以下のように定めることができる（$\leftrightarrow$ の左辺はブール束の演算，右辺はブール環の演算を表している）．

$$x_i \vee x_j \leftrightarrow x_i + x_j + x_i \cdot x_j \tag{25}$$

$$x_i \wedge x_j \leftrightarrow x_i \cdot x_j \tag{26}$$

$$\overline{x_i} \leftrightarrow x_i + 1 \tag{27}$$

このとき，$(\mathcal{B}, \vee, \wedge, \overline{x_i})$はブール束となる．

本稿では以後，誤解の生じる場合を除き，論理積$x_i \wedge x_j$，積$x_i \cdot x_j$ともに $x_i x_j$ と略記することとする．

質問からの学習についてのこれまでの研究では，仮説はいずれかの表現で定義されていた．また，二つの表現法の相互関係を論じた研究もほとんど行われていなかった．そこで，ブール環上で定義されるt-sparse 関数について，以下で考えていく．

7.2 ブール束上で表現したときのt-sparse 関数

例 7 $n=3$の場合を考える．3-*sparse* 関数に含まれる仮説の例として，$x_0+x_1+x_2$があげられるが，この仮説を *(23)* 式を用いてブール束上で表現すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} & x_0+x_1+x_2 \\ & \quad \leftrightarrow \quad x_2x_1x_0 \vee x_2\overline{x}_1\overline{x}_0 \vee \overline{x}_2x_1\overline{x}_0 \vee \overline{x}_2\overline{x}_1x_0. \end{aligned} \tag{28}$$

この仮説はブール束上で表現したとき，複雑な仮説となることがわかる．

逆に，ブール束上では単項式である$\overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0$は，*(26)*,*(27)* 式を用い，ブール環上で表現すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0 \\ & \quad \leftrightarrow \quad 1+x_0+x_1+x_2+x_1x_0 \\ & \qquad\quad +x_2x_0+x_2x_1+x_2x_1x_0. \end{aligned} \tag{29}$$

□

これより，この仮説は 8-sparse 関数に含まれていることがわかる．

このように従来多く研究されているt-sparse 関数は命題論理的には非常に解釈しづらいクラスであることがわかる．

7.3 read-oncce 式とproduct 関数

この節では，ブール束上で定義される仮説クラスである read-once 式[8]が，本稿で定義したproduct 関数の部分クラスであることを示す．

始めに，read-once 式について説明を行う．

[8]計算量的学習理論と呼ばれる分野では，ブール束上で定義される多くの仮説クラスについて，研究が行われている．この中の一つである read-once 式は，所属性質問だけからは多項式時間不可能であることが示されているクラスである [3, 4].

定義 2 *read-once* 式は再帰的に以下で定義される．

1. $x_i, \overline{x_i}(0 \leq i \leq n-1)$ は *read-once* 式である．

2. f', f''が *read-once* 式であり，$f' \vee f''$において各変数が高々一度しか現れないなら $f' \vee f''$は *read-once* 式である．

3. f', f''が *read-once* 式であり，$f' \wedge f''$において各変数が高々一度しか現れないなら $f' \wedge f''$は *read-once* 式である．

以上の *(1),(2),(3)* から再帰的に構成されるものだけが *read-once* 式である． □

read-once 式に含まれる仮説の例を以下の例 8 に載せる．

例 8 $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ は *read-once* 式に含まれるが，$(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_4)$ は x_1が *2* 度現れているため，*read-once* 式に含まれない． □

ここで，product 関数と read-once 式とに対し，以下の定理が成立する．

定理 1 *read-once* 式は，*product* 関数の部分クラスである．

（証明）付録参照． □

次に，product 関数と read-once 式に含まれる仮説数の比較を行う．

$s = 3$ の場合，read-once 式に含まれる仮説数と product 関数に含まれる仮説数 [9]を表3で与える．この表より $s = 3$ の場合，nのオーダで考えると二つのクラスの仮説数は共に $O(n^3)$ であることがわかる．

次に，定理 1 が成立する理由について考える．ブール束上の論理和をブール環上で表現するとき，(25) 式により，二つの項の積も出現することがわかる．ここで，ブール環上での和は排他的論理和であるため，同じ項

[9]product 関数に含まれる仮説数は (9) 式により求めた．また，read-once 式に含まれる仮説数は全ての仮説を列挙することにより求めた．

表 3: read-once 式と product 関数に含まれる仮説数の比較 ($s=3$)

	仮説数
product 関数	$90\binom{n}{3}+8\binom{n}{2}+2\binom{n}{1}+2$
read-once 式	$64\binom{n}{3}+8\binom{n}{2}+2\binom{n}{1}+2$

の和は0になってしまうが，read-once 式では各変数が高々一度しか現れないため，ブール環上で表現したときに同じ項が複数回現れることはないので，常に仮定2が成立する．

逆にブール束上で同じ変数が2度以上現れる関数では，(25)式によってブール環上で表現したとき，同じ項が複数個現れる場合がある．ブール環上での和は排他的論理和であるため，同じ項の和は0になってしまう．このため，仮定2が一般に成立するとは限らない．

8 むすび

本稿では，ブロック単位で質問を行う質問モデルが適したブール環上の新しい仮説クラスを定義し，計算量・メモリ量・質問回数の点で効率良く真の仮説を学習するアルゴリズムを提案した．更に，ブール束上で定義される仮説クラスの一つである read-once 式はこのクラスの部分クラスであることを示し，その差について評価を行った．

今回はブール環上での一つの性質を満たすクラスについて考えてきたが，他にもブール環上で成立する様々な性質が考えられる．これらの性質を満たすクラスに対してアルゴリズムを構築することやブール束上の仮説クラスとの関係を示すことなどが今後の課題である．

参考文献

[1] R.M. Roth and G.M. Benedek, "Interpolation and Approximation of Sparse Multivariate Polynomials Over GF(2)," SIAM J. Comput., Vol.20, No.2, pp.291–314, 1991.

[2] T. Hofmeister, "An Application of Codes to Attribute-Efficient Learning," Proc. 4th European Conference on Computational Learning Theory, pp.101–110, 1999.

[3] D. Angluin, "Queries and concept learning," Machine Learning, Vol.2, pp.319–342, 1988.

[4] D. Angluin, L. Hellerstein, and M. Karpinski, "Learning Read-Once Formulas with Queries," Journal of the ACM, Vol.40, No.1, pp.185–210, 1993.

[5] 浮田 善文, 松嶋 敏泰, 平澤 茂一：”質問からの学習問題の決定理論による定式化に関する一考察”, 情報処理学会論文誌, Vol.39, No.11, pp.2937-2948,1998.

[6] 浮田 善文, 松嶋 敏泰, 平澤 茂一：”質問からのブール関数の学習における学習戦略を求めるアルゴリズム”, 第22回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.845-848,1999.

[7] 浮田 善文, 松嶋 敏泰, 平澤 茂一:”直交計画を用いたブール関数の学習に関する一考察”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J86-A,No.4, pp.482-490, 2003.

[8] F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane: The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[9] 高橋磐郎, 組合せ理論とその応用, 岩波全書 316, 1979.

[10] 奥野忠一，芳賀敏郎, 実験計画法, 培風館, 1969.

[11] 成島弘，小高明夫，"ブール代数とその応用，" 東海大学出版会，1983.

A　定理1の証明

始めに必要な語を定義しておく．仮説f', f''はブール束上で表現されているものとする．仮説fに含まれる変数の集合を$S(f)$と定義する．product関数に含まれる仮説の集合を$\mathcal{F}_1$とする．仮説f'をガロア標準形で表現したとき，係数$f_{\underline{i}}$が1であるベクトル$\underline{i}$の集合をF'_1と定義する．同様に，$f'', f' \wedge f'', f' \vee f''$に対しても，係数$f_{\underline{i}}$が1であるベクトル$\underline{i}$の集合をそれぞれ$F''_1, F'^{\wedge ''}_1, F'^{\vee ''}_1$と定義する．このとき，$f', f''$をブール環上で表現した式を，それぞれ$f' = \sum_{\underline{k} \in F'_1} x(\underline{k})$, $f'' = \sum_{\underline{l} \in F''_1} x(\underline{l})$と書くことができる．

定理1を証明する前に補題と系を求めておく．まず，以下の補題が成立する．

補題 4 任意のf', f'' ,$(f', f'' \in \mathcal{F}_1,\ S(f') \cap S(f'') = \phi)$に対し，

$$f' \wedge f'' \in \mathcal{F}_1. \tag{30}$$

が成立する．

（証明）$S(f') \cap S(f'') = \phi$より，任意の$\underline{k_1 l_1}, \underline{k_2 l_2}$, $(\underline{k_1}, \underline{k_2} \in F'_1; \underline{l_1}, \underline{l_2} \in F''_1; (\underline{k_1}, \underline{l_1}) \neq (\underline{k_2}, \underline{l_2}))$に対し，

$$\underline{k_1 l_1} \neq \underline{k_2 l_2} \tag{31}$$

が成立する．

(31) 式に注意すると[1]，$f' \wedge f''$は *(26)* 式を用い，次式で表現される．

$$\begin{aligned} f' \wedge f'' &= \left(\textstyle\sum_{\underline{k} \in F_1'} x(\underline{k})\right)\left(\textstyle\sum_{\underline{l} \in F_1''} x(\underline{l})\right) \\ &= \sum_{\underline{i} \in F_1'^{\wedge''}} x(\underline{i}), \end{aligned} \tag{32}$$

ただし，

$$F_1'^{\wedge''} = \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1', \underline{l} \in F_1''\}, \tag{33}$$

である．このとき，

$$\underline{k_1 l_1} \cdot \underline{k_2 l_2} = \underline{k_1 k_2} \cdot \underline{l_1 l_2} \tag{34}$$

であるが，$f' \in \mathcal{F}_1$より$\underline{k_1 k_2} \in F_1'$ が成立し，$f'' \in \mathcal{F}_1$より$\underline{l_1 l_2} \in F_1'$ が成立するので，$\underline{k_1 k_2} \cdot \underline{l_1 l_2} \in F_1'^{\wedge''}$が成立する．故に，$\underline{k_1 l_1} \cdot \underline{k_2 l_2} \in F_1'^{\wedge''}$が成立する．

以上より，$f' \wedge f''$に性質 *1* が成り立つので，$f' \wedge f'' \in \mathcal{F}_1$が示された．

□

補題 4 より，以下の 3 つの系が得られる．

系 1　任意のf', f'' ,$(f', f'' \in \mathcal{F}_1,\ S(f') \cap S(f'') = \phi,\ \underline{0} \in F_1', \underline{0} \in F_1'')$ に対し[2]，

$$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1, \tag{35}$$

が成立する．

（証明）このとき，$f' = 1 + \sum_{\underline{i} \in F_1' \setminus \{0\}} x(\underline{i})$, $f'' = 1 + \sum_{\underline{i} \in F_1'' \setminus \{0\}} x(\underline{i})$ と表現できるので，$f' \vee f'', F_1'^{\vee''}$ は，*(25)* 式を用いて，次式で表現される．

$$\begin{aligned} &f' \vee f'' \\ &= 1 + \textstyle\sum_{\underline{i} \in F_1' \setminus \{0\}} x(\underline{i}) + 1 + \sum_{\underline{i} \in F_1'' \setminus \{0\}} x(\underline{i}) \end{aligned}$$

[1]ブール環の性質より，$x(\underline{i}) + x(\underline{i}) = 0$ であるので，一般にすべての$\underline{i} \in \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1', \underline{l} \in F_1''\}$ に対し，$f_{\underline{i}} = 1$ が成立するとは限らない．

[2]$\underline{0}$ は，要素がすべて 0 のn次元ベクトルである．

$$+\left(1+\sum_{\underline{i}\in F_1'\setminus\{0\}} x(\underline{i})\right)\left(1+\sum_{\underline{i}\in F_1''\setminus\{0\}} x(\underline{i})\right)$$
$$= \sum_{\underline{i}\in F_1^{\prime\vee\prime\prime}} x(\underline{i}), \qquad (36)$$

ただし,

$$F_1^{\prime\vee\prime\prime} = \{\underline{0}\} \cup \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1'' \setminus \{\underline{0}\}\}. \qquad (37)$$

である.ここで補題 *4* より,任意の$\underline{k_1 l_1}, \underline{k_2 l_2} \in \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1'' \setminus \{\underline{0}\}\}$に対して,$\underline{k_1 l_1} \cdot \underline{k_2 l_2} \in \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1'' \setminus \{\underline{0}\}\}$が成立する.また,$\underline{0}$と$\underline{kl} \in \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1'' \setminus \{\underline{0}\}\}$に対して,$\underline{0} \cdot \underline{kl} \in \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1'' \setminus \{\underline{0}\}\}$が成立する.

それ故,$\underline{k_1 l_1}, \underline{k_2 l_2} \in F_1^{\prime\vee\prime\prime}$に対して,$\underline{k_1 l_1} \cdot \underline{k_2 l_2} \in F_1^{\prime\vee\prime\prime}$が成立する.以上より$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1$が示された. □

系 2 任意のf', f'' ,$(f', f'' \in \mathcal{F}_1,\ S(f') \cap S(f'') = \phi,\ \underline{0} \in F_1', \underline{0} \notin F_1'')$ に対し[3],

$$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1, \qquad (38)$$

が成立する.

(証明) $F_1^{\prime\vee\prime\prime}$を求めると以下のようになる.

$$\begin{aligned} F_1^{\prime\vee\prime\prime} &= \{\underline{0}\} \cup \{\underline{k} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}\} \\ &\quad \cup \{\underline{kl} | \underline{k} \in F_1' \setminus \{\underline{0}\}, \underline{l} \in F_1''\}. \end{aligned} \qquad (39)$$

あとは,系 *1* と同様に,$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1$を示すことができる. □

系 3 任意のf', f'' ,$(f', f'' \in \mathcal{F}_1,\ S(f') \cap S(f'') = \phi,\ \underline{0} \notin F_1', \underline{0} \notin F_1'')$ に対し,

$$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1, \qquad (40)$$

[3]一般性を失わないため,$\underline{0} \in F_1', \underline{0} \notin F_1''$としたが,$\underline{0} \in F_1'', \underline{0} \notin F_1'$ も同様に証明することができる.

が成立する．

（証明） $F_1^{\prime\vee\prime\prime}$を求めると以下のようになる．

$$F_1^{\prime\vee\prime\prime} = \{\underline{k}|\underline{k} \in F_1'\} \cup \{\underline{l}|\underline{l} \in F_1''\} \\ \cup \{\underline{kl}|\underline{k} \in F_1', \underline{l} \in F_1''\}. \tag{41}$$

あとは，系 *1* と同様に，$f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1$を示すことができる． □

以上の準備のもとで，定理1の証明を行う．

（定理1の証明）

数学的帰納法によって証明を行う．

$x_i, \overline{x}_i \in \mathcal{F}_1$は明らか．ここで，read-once 式は定義より $S(f') \cap S(f'') = \phi$を満たすので，$f', f'' \in \mathcal{F}_1$，$(S(f') \cap S(f'') = \phi)$ と仮定したとき，

1. $f' \wedge f'' \in \mathcal{F}_1$
2. $f' \vee f'' \in \mathcal{F}_1$

が成立することを示すことができれば，数学的帰納法により任意の read-once 式は，$\mathcal{F}_1$に含まれることが証明される．

(1) は，補題より明らか．次に (2) について考える．ベクトルの集合 F_1', F_1''がそれぞれ$\underline{0}$を含むかどうかによって3通りの場合に分けられる．それぞれの場合について，系 1，2，3 の結果から (2) は明らか．

以上より，定理1が証明された． □